പൈ (π)

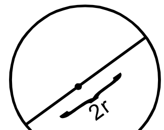
Pi

ഗണിതശാസ്ത്രത്തിലെ ഒരു വിഖ്യാത സംഖ്യ. നാലായിരത്തോളം വർഷമായി ഗണിതലോകത്തെ വിസ്മയിപ്പിക്കുകയും വിഭ്രമിപ്പിക്കുകയും ചെയ്തുവരുന്ന സംഖ്യയാണ് π എന്ന ഗ്രീക്ക് അക്ഷരത്താൽ സൂചിപ്പിക്കപ്പെടുന്ന 3.1415 9265... എന്ന സംഖ്യ. ഗണിതശാസ്ത്രത്തിൽ സവിശേഷ സ്ഥാനമാണ് π -യ്ക്ക്.

ലേഖനസംവിധാനം

I. **നിർവചനം.** ഏതൊരു വൃത്തത്തിന്റെയും പരിധിയെ (circumference) വ്യാസം (diameter) കൊണ്ടു ഭാഗിച്ചാൽ ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യയാണ് കിട്ടുക. ഈ സ്ഥിരസംഖ്യയാണ് π കൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

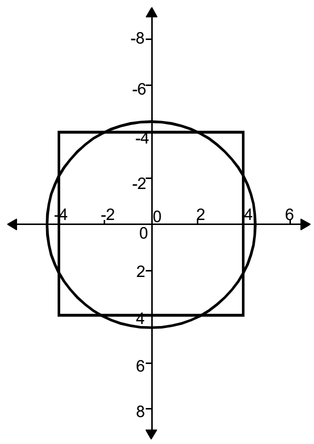
രേഖീയ സംഖ്യകൾ (വാസ്തവികസംഖ്യകൾ) ഒരു രേഖയിൽ അടയാളപ്പെടുത്താവുന്നവയാണ്. ഈ രേഖ സംഖ്യാരേഖ (number line) എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു. p, q പൂർണസംഖ്യകളാവുകയും $q \neq 0$ ആവുകയും ചെയ്താൽ $^{p}/_{q}$ എന്ന രൂപത്തിലെഴുതാവുന്ന സംഖ്യകളെ ഭിന്നകങ്ങളെന്നു പറയുന്നു. എല്ലാ പൂർണസംഖ്യകളും ഭിന്നകങ്ങളാണ്. ഭിന്നസംഖ്യകളും ഭിന്നകങ്ങൾ തന്നെ. ഇത്തരത്തിൽ എഴുതാൻ കഴിയാത്ത സംഖ്യകളെ അഭിന്നകങ്ങളെന്നു പറയുന്നു. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ തുടങ്ങിയവ അഭിന്നകങ്ങളാണ്. എന്നാൽ ഇവയും രേഖീയ സംഖ്യകൾ തന്നെ. പൊതുവെ, ആവർത്തകമല്ലാത്ത (non-recurring), അവസാനിക്കാത്ത (non-terminating) ദശാംശരൂപത്തിലുള്ള സംഖ്യകൾ അഭിന്നകങ്ങളാണ്. π ഒരു അഭിന്നകമാണ്. കാരണം അതിന്റെ ദശാംശരൂപം ആവർത്തകമല്ലാത്ത, അവസാനിക്കാത്ത ഒന്നാണ്. $\sqrt{2}$, എന്ന അഭിന്നകം $x^2 - 2 = 0$ എന്ന ബീജഗണിതസമവാക്യത്തിന്റെ മൂല്യമായി ലഭിക്കുന്നു. എന്നാൽ π എന്ന അഭിന്നകം, ഭിന്നകഗുണോത്തരങ്ങളുള്ള ബീജഗണിത സമവാക്യത്തിന്റെ മൂല്യമല്ല. ഇത്തരം സംഖ്യകളെ അതീത സംഖ്യകൾ (transcendental numbers) എന്നു വിളിക്കാം. π , e തുടങ്ങിയവ അതീത സംഖ്യകളാണ്.



പരിധി $2\pi r$

II. **ചരിത്രം. ഈജിപ്ത്**. ബി.സി. 1650–ലേതെന്ന് കരുതുന്ന പാപ്പിറസിൽ നിരവധി ഗണിത പ്രശ്നങ്ങൾ എഴുതിയിരിക്കുന്നവയിൽ ഒന്ന് ഇപ്രകാരമാണ് – 'വശം 8 ആയ സമചതുരത്തിനും വ്യാസം 9 ആയ വൃത്തത്തിനും ഒരേ വിസ്തീർണമാണ്. ഇതിൽനിന്നും ഏതൊരു വൃത്തത്തിന്റെയും വിസ്തീർണം കണക്കാക്കുക'.

ഈ പ്രശ്നം വിശകലനം ചെയ്താൽ നമുക്ക് π -യുടെ വില $3\frac{13}{81}$ എന്നു കിട്ടും. ഇത് ഒരു 'ഏകദേശന'മാണ്. മുകളിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത് 'വൃത്തത്തെ ചതുരമാക്കൽ' (squaring the circle) എന്ന പ്രാചീന പ്രശ്നമാണ്. അതായത്, ഒരു വൃത്തതിനു തുല്യ വിസ്തീർണമുള്ള സമചതുരം നിർമിക്കുക എന്ന പ്രശ്നം. ഈ പ്രശ്നത്തിനു ജ്യാമിതീയ നിർമിതി രീതിയിൽ പരിഹാരമില്ലെന്നു തെളിയിക്കാൻ അനേക നൂറ്റാണ്ടുകൾ വേണ്ടിവന്നു.



ബൈബിളിൽ π : ഹീബ്രു ഭാഷയിലെഴുതിയ *പഴയ നിയമ*ത്തിൽ സോളമൻ രാജാവിന്റെ കുളത്തെപ്പറ്റി ഒരു വർണനയുണ്ട്. ഇതിൽ 10 യൂണിറ്റു വ്യാസമുള്ള കുളത്തിന്റെ വൃത്താകാരമായ പരിധി 30 യൂണിറ്റ് എന്നു പറയുന്നു. ഇതിൽ നിന്നും അക്കാലത്തെ π -യുടെ ഏകദേശനം 3 ആയിരുന്നുവെന്നു കാണാം. എന്നാൽ നമ്മുടെ കടപയാദി സമ്പ്രദായത്തിലെന്നപോലെ ശ്ലോകത്തിലെ അക്ഷരങ്ങൾക്ക് അക്കങ്ങൾ വിലയായി നൽകിയാൽ 3.141509 എന്ന നാല് ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾക്കു കൃത്യമായ ഏകദേശനം ലഭിക്കും. എന്നാൽ ഇതിന് ഗണിതശാസ്ത്രപരമായ ആധികാരികതയില്ല.

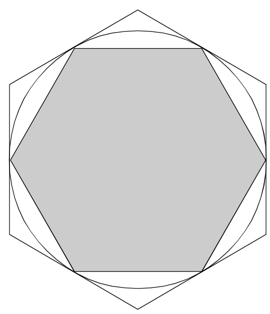
ഗ്രീസ്. 1936-ൽ സ്ട്രഡ എന്ന സ്ഥലത്തു നിന്നും (ബാബിലോണിയയിൽ നിന്നും 200–300 കിലോമീറ്റർ അകലെ) കണ്ടെത്തിയ പുരാലിഖിതങ്ങളിൽ നിന്നും π -യ്ക്ക് $3\frac{1}{8}$ എന്ന ഏകദേശനം ഉപയോഗിച്ചിരുന്നതായി കാണാം.

യൂക്ലിഡിന്റെ *എലമെന്റ്സ്* 12.2 ഇപ്രകാരം പ്രസ്താവിക്കുന്നു: അവയുടെ വ്യാസങ്ങളിന്മേലുള്ള സമചതുരങ്ങളെപ്പോലെയാണ് രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ പരസ്പരം ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നത്.

ഗ്രീസുകാർ ബി.സി. 4–ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഈ ആശയത്തെപ്പറ്റി ആഴത്തിൽ ചിന്തിക്കാൻ ശ്രമിച്ചു. അനക്സഗോറസ് (ബി.സി. 550–428) ആണ് വൃത്തവും ചതുരവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ചർച്ച ചെയ്ത ആദ്യ ഗ്രീസുകാരൻ എന്നുപറയപ്പെടുന്നു.

സോക്രട്ടീസിന്റെ സമകാലികരായിരുന്നു ആന്റിഫണും ബ്രിസണും. രേചനതത്ത്വം (Principle of exhaustion) ഇവരാണ് ആദ്യമായി ഉപയോഗിച്ചത്. വൃത്തത്തിൽ ആലേഖനം ചെയ്ത ഒരു സമഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം ക്രമേണ ഇരട്ടിച്ചുകൊണ്ടിരുന്നാൽ ആത്യന്തികമായി ബഹുഭുജം വൃത്തത്തിൽ വിലയം പ്രാപിക്കും.

ആന്റിഫൺ ആദ്യം വൃത്തത്തിൽ ബഹുഭുജം ആലേഖനം ചെയ്തു. ക്രമാനുഗതമായി ബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂട്ടി. ഓരോ ബഹുഭുജവും വൃത്തത്തോട് അടുക്കുന്നതനുസരിച്ച് അതിന്റെ വിസ്തീർണം കണ്ടുപിടിച്ചു. ബ്രിസൺ അല്പംകൂടി കടന്നു ചിന്തിച്ചു. വൃത്തത്തിൽ ഒരു സമബഹുഭുജം അന്തർലേഖനം ചെയ്യുകയും മറ്റൊന്ന് ബഹിർലേഖനം ചെയ്യുകയും ചെയ്തു. വൃത്തവിസ്തീർണം ഇവയുടെ വിസ്തീർണങ്ങൾക്കിടയിലാണെന്നു കണ്ടെത്തി. ഉച്ച നിമ്ന പരിധികളുപയോഗിച്ചുള്ള ആദ്യ ശ്രമമായിരുന്നു ഇത്.



ഇരുനൂറു വർഷങ്ങൾക്കുശേഷം ആർക്കിമെഡിസ് (ബി.സി. 287–212) ഇരുവരുടെയും രീതി സമന്വയിപ്പിച്ചു. വിസ്തീർണത്തിനു പകരം ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ചുറ്റളവ് ഉപയോഗിച്ച് വൃത്ത പരിധി നിർണയിച്ചു.

അദ്ദേഹം വൃത്തത്തിൽ അന്തർലേഖനം ചെയ്ത സമഷഡ്ഭുജവും ബഹിർലേഖനം ചെയ്ത മറ്റൊരു സമഷഡ്ഭുജവും പരിഗണിച്ചു. വൃത്തവ്യാസം 1 എങ്കിൽ അന്തർ ലിഖിത

സമഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 3 ആണ്. ഇത് വൃത്തപരിധിയായ π -യെക്കാൾ ചെറുതാണ്. ബഹിർലിഖിത സമഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് $3\sqrt{2}$ അല്ലെങ്കിൽ 3.46... അപ്പോൾ $3 < \pi < 3.46$. സമഷഡ്ഭുജത്തിനു പകരം 12 സമ വശങ്ങളുള്ള സമഭുജം ഉപയോഗിച്ചാൽ കുറേക്കൂടി നല്ല ഏകദേശനം കിട്ടും. ഈ ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾക്കുള്ളിൽ π ഞെരിഞ്ഞമരുന്നു. 96 വശങ്ങളുള്ള സമ ബഹുഭുജങ്ങളിൽ നിന്നും ആർക്കിമെഡിസ് $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ എന്ന ഏകദേശന പരിധികൾ കണ്ടെത്തി. അതായത്, $3.1408 < \pi < 3.1428$ ഇത് രണ്ട് ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾക്കു ശരിയായ ഏകദേശനമാണ്.

തുടർന്ന് അപ്പോളോനിയസ് (ബി.സി. 250-175) 3.1416 എന്ന ഏകദേശനം നൽകി. ടോളമി (100-178) $\frac{377}{120} = 3.14166$ ... എന്ന ഏകദേശനത്തിലെത്തി.

$3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600}$ ആണ് π -യുടെ വിലയെന്ന് ടോളമി തന്റെ *മെഗലെ സിന്റക്സിസ്ടെ അസ്ട്രോണോമിയസ് (Megale syntaxis tes astronomieas)* എന്ന ഗ്രന്ഥത്തിൽ രേഖപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്. ഇത് ശരിയായ വിലയ്ക്ക് 0.003 ശതമാനം അടുത്താണ്.

റോം: ക്രിസ്തുവിന് മുമ്പുള്ള കാലഘട്ടത്തിലെ റോമാക്കാർ $3\frac{1}{8}$ ആണ് π യുടെ ഏകദേശനമായി സ്വീകരിച്ചത്, $3\frac{1}{7}$ ആണ് കൂടുതൽ കൃത്യമെന്ന് അറിയാമായിരുന്നിട്ടുകൂടി. 4 അടി വ്യാസമുള്ള ചക്രത്തിന് $12\frac{1}{2}$ അടി പരിധിയുണ്ട് എന്ന തോതാണ് അവർ വ്യാപകമായി ഉപയോഗിച്ചിരുന്നത്. ഇത് $3\frac{1}{8}$ എന്ന ഏകദേശനമാണ്. $\pi = 4$ എന്ന ഏകദേശനമുപയോഗിച്ച് റോമാക്കാർ പടുത്തുയർത്തിയ സൗധങ്ങൾ അദ്ഭുതമുണർത്തും.

ചൈന. ബി.സി. 12-ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ചൈനാക്കാർ $\pi = 3$ എന്ന ഏകദേശനമുപയോഗിച്ചിരുന്നു. 900 വർഷങ്ങൾക്കു ശേഷമാണ് ചൈനയിൽ ഇത് സംബന്ധിച്ച് കാര്യമായ പഠനം നടന്നത്. ക്രിസ്തുവിനുശേഷം രണ്ടാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ചാങ്ഹോങ് $\frac{\pi^2}{16} = \frac{5}{8}$ എന്നു കണ്ടെത്തി. ഇതിൽ നിന്നും $\pi = \sqrt{10} = 3.162$ എന്ന ഏകദേശനം ലഭിച്ചു. വാങ് ഫൗ (229-267) ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ പരിധി 142 എങ്കിൽ വ്യാസം 45 എന്നു കണ്ടെത്തി. ഇത് $\pi = 3.156$ എന്ന ഏകദേശനത്തിലെത്തിച്ചു. ലിയുഹുയ് 3-ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ 3072 വശങ്ങളുള്ള സമഭുജമുപയോഗിച്ച് π -യുടെ വില അഞ്ചു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾക്ക് കൃത്യമായി $\pi = 3.14159$ എന്നു കണ്ടെത്തി. 5-ാം നൂറ്റാണ്ടിലെ ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്രജ്ഞനായ ത്സുചുങ്ചി മകൻ ത്സു കെങ് ചിയോടൊപ്പം 24,576 വശങ്ങളുള്ള ബഹുഭുജമുപയോഗിച്ച് $\frac{355}{113} = 3.1415929$ എന്ന ഏകദേശനം കണ്ടെത്തി. ഇത് ആറു ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങൾക്കു ശരിയായ വിലയാണ്.

അറേബ്യ. അൽ ഖാരിസ്മി ക്രിസ്തുവിനുശേഷം 833-മാണ്ടിൽ π -യുടെ ഏകദേശനമായി $3\frac{1}{7}$ -ഉം തുടർന്ന് $\frac{62832}{20000} = 3.1416$ -ഉം നിർദേശിച്ചു. 1436-ൽ അൽ യാഷി $2\pi = 6.2831853071795865$ എന്നു കണ്ടെത്തി.

യൂറോപ്പ്. ഫിബൊനാച്ചി (Fibonacci) 1202-ൽ π -യുടെ വില $\frac{864}{275} \approx 3.1418$ എന്നു കണ്ടെത്തി. ഇത് *പ്രാക്ടിക്കാ ജ്യോമെട്രിയ (Practica Geometriae)* എന്ന പുസ്തകത്തിൽ കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്. 1593-ൽ ഫ്രാങ്സ്വ വിയറ്റ (Francois Vieta, 1540-1603) നേരിട്ടു π കാണുവാൻ ഗുണിത രൂപത്തിലുള്ള ആദ്യ സൂത്രം കണ്ടെത്തി.

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}$$

ഇതിലൂടെ 10 ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾക്ക് കൃത്യത കൈവരുത്തി. ബഹുഭുജങ്ങൾക്കു പകരം ത്രികോണങ്ങളാണ് അദ്ദേഹം ഉപയോഗപ്പെടുത്തിയത്. ഇത് *ഗണിതത്തിലെ വിവിധ പ്രശ്നങ്ങൾ* -വാല്യം 8 (*Variorum de rebus mathematics responsorum Liber VIII*) എന്ന പുസ്തകത്തിൽ ഉൾപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്. ഗ്രീസുകാരും ചൈനാക്കാരും ചിഹ്നനത്തിന്റെ ബുദ്ധിമുട്ടു നേരിട്ടവരായിരുന്നു. ഇന്നുപയോഗിക്കുന്ന അറബി അക്കങ്ങൾ (Arabic numerals) പ്രചാരത്തിലായതോടെ π -യുടെ വില നിരവധി സ്ഥാനങ്ങൾക്കു കൃത്യമായി കാണാനുള്ള ശ്രമങ്ങൾക്കു വേഗമേറി. ലുഡോൾഫ് വാൻ സൊയ്‌ലൻ (Ludolph van Ceulen) എന്ന ഡച്ചുകാരൻ 60×2^{29} വശങ്ങളുള്ള ബഹുഭുജത്തിന്റെ സഹായത്തോടെ π -യുടെ വില 20 ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾക്കു കൃത്യമായി കാണുകയും പിന്നീടത് 35 സ്ഥാനമാക്കി ഉയർത്തുകയും ചെയ്തു.

കലനം (calculus) നിരവധി അനന്തശ്രേണികൾ π -യ്ക്കു സമ്മാനിച്ചു. 14-15 ശതകങ്ങളിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന മാധവൻ എന്ന ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞൻ ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങൾക്ക് അനന്തശ്രേണികൾ കണ്ടെത്തി. ഗ്രിഗറി എന്ന ബ്രിട്ടീഷ് ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞന്റെ സംഭാവനകളും പരിഗണിച്ച് ഈ ശ്രേണി മാധവ -ഗ്രിഗറി ശ്രേണി എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു. എബ്രഹാം ഷാർപ്പ് അത്തരം ഒരു ശ്രേണി ഉപയോഗിച്ച് 1705-ൽ 72 ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങൾക്കു കൃത്യമായി π -യുടെ വില കണ്ടു. തുടർന്ന് ജോൺ മാക്കിൻ 100 സ്ഥാനങ്ങളിലേക്കും 1717-ൽ തോമാ ദ് ലാനി (Thomas de Lagny) 127 സ്ഥാനങ്ങൾക്കും π -യുടെ ഏകദേശനം എത്തിച്ചു.

ഇംഗ്ലണ്ടിലെ ജോൺ വാലിസിന്റെ (John Wallis) (1616-1703) സൂത്രം ശ്രദ്ധേയമാണ്.

$\frac{2}{\pi} = \frac{1.3.3.5.5.7...}{2.2.4.4.6.6...}$ ഇതിൽ നിന്നും ലോർഡ് ബ്രൗൺകർ (Lord Brounchar; 1620-1684)

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cdots}}}}.$$

എന്ന തുടർഭിന്നം (continued fraction) കണ്ടെത്തി. ജയിംസ് ഗ്രിഗറി(James Gregory;1637-75)യുടെ

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \text{arc } \tan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

എന്ന ശ്രേണി (മാധവ-ഗ്രിഗറി ശ്രേണി)യിൽ നിന്നും പ്രചോദനം കൊണ്ട് ജോൺ മാക്കിൻ (John Machin; 1680-1751)

$\frac{\pi}{4} = 4\text{arc} \tan\frac{1}{5} - \text{arc} \tan\frac{1}{239}$ എന്ന് കണ്ടെത്തി. ഗണിതശാസ്ത്രത്തിലെ മഹാ പ്രതിഭയായിരുന്ന ലെയൊനാർഡ് ഒയ്‌ലർ (Leonhard Euler; 1707-83) π -യുടെ വില കണ്ടെത്താനുള്ള നിര വധി സൂത്രവാക്യങ്ങൾ അവതരിപ്പിച്ചു. 1779-ൽ

$\pi = 20 \text{ arc tan} \frac{1}{7} - 8 \text{ arc tan} \frac{3}{79}$ എന്ന സൂത്രം അദ്ദേഹം കണ്ടെത്തി. കൂടാതെ

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$\frac{\pi^6}{945} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

തുടങ്ങിയ സൂത്രങ്ങളും അദ്ദേഹം സംഭാവന ചെയ്തു.

1706-ൽ വില്യം ജോൺസ് ആണ് ആദ്യമായി π എന്ന ഗ്രീക്ക് അക്ഷരം വൃത്തപരിധിയും വ്യാസവും തമ്മിലുള്ള അനുപാതം സൂചിപ്പിക്കുവാൻ ഉപയോഗിച്ചത് എന്ന് ഗീവർഗീസ് ജോസഫിന്റെ *മയൂരശിഖ* (*The Crest of Peacock*) എന്ന ഗ്രന്ഥത്തിൽ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. ലെയൊനാർഡ് ഒയ്‌ലർ 1748-ൽ പ്രസിദ്ധീകരിച്ച *അനാലിസിസ് ഇൻഫിനിറ്റോറം (Analysis Infinitorum)* എന്ന കൃതിയിൽ ഉപയോഗിച്ചതോടെ ഈ ചിഹ്നത്തിന് വ്യാപകമായ അംഗീകാരം ലഭിച്ചു.

ലോഗരിതത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനമായി ഉപയോഗിക്കുന്ന e എന്ന സംഖ്യയും -1 ന്റെ വർഗമൂലമായ i എന്ന സാങ്കല്പിക സംഖ്യയും ചേർത്ത് ഒയ്‌ലർ നൽകിയ

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

എന്ന സമവാക്യം പ്രസിദ്ധമാണ്. ഇവിടെ e, π എന്നീ അതീത സംഖ്യകൾ (transcendental numbers), i എന്ന സമ്മിശ്രസംഖ്യ (complex number), 0,1 എന്നീ സവിശേഷ പൂർണസംഖ്യകൾ ഇവയെ ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന ഒരു മനോഹര ദൃശ്യമാണ് ഒരുക്കിയിരിക്കുന്നത്.

π -യുടെ നാൾ വഴി തുടർന്നാൽ, 1800-ഓടെ വേഗ, π -യുടെ വില 140 സ്ഥാനങ്ങൾക്കു കൃത്യമാക്കി. സക്കറിയാസ് ദാസെ (Zacharias Dase) അത് 200 സ്ഥാനങ്ങളാക്കി. താഴെകൊടുത്തിരിക്കുന്ന ശ്രേണിയാണ് ദാസെ ഉപയോഗിച്ചത്.

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^3}{3}\right]$$

$$+ \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5} + \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^5}{5} + \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^5}{5}\right] - \cdots$$

ഇതിൽ നിന്നും കിട്ടുന്ന

$\pi = 4$ [0.825-0.0449842+0.00632-----]

എന്ന ശ്രേണിയിലെ ഒമ്പതു പദങ്ങളെടുത്താൽ രണ്ടു ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങളുടെ കൃത്യത കിട്ടും.

ബ്രിട്ടൻകാരനായ വില്യം റൂഥർഫോർഡ് (William Rutherford) 440 സ്ഥാനങ്ങൾക്കു കൃത്യമായി π -യുടെ വില കണ്ടു. വില്യം ഷാങ്ക്സ് (William Shanks) 1874-ൽ 707 സ്ഥാനങ്ങളുടെ കൃത്യത അവകാശപ്പെട്ടു. എന്നാൽ 527-ാം സ്ഥാനത്തെ അക്കം തെറ്റാണെന്ന് ഫെർഗുസൻ (Fergusson) കണ്ടെത്തി. പേനയും കടലാസുമുപയോഗിച്ച് അദ്ദേഹം 1946-ൽ 620 സ്ഥാനങ്ങൾ കൃത്യമാക്കി. ഇത്തരത്തിൽ ഇതിനപ്പുറം ആരും π -യുടെ വില കൃത്യമാക്കിയിട്ടില്ല.

ഒരു കാൽക്കുലേറ്റർ ഉപയോഗിച്ച് 1947-ൽ ഇദ്ദേഹം 808 സ്ഥാനങ്ങൾ ഉറപ്പാക്കി. പിന്നീട് മത്സരം കംപ്യൂട്ടറുകൾ ഏറ്റെടുത്തു. ആദ്യ ശ്രമം ഈനിയാക് (ENIAC - Electronic Numerical Integrator and Computer) ആണ് നടത്തിയത്.

III. **ഭാരതത്തിൽ.** ഭാരതത്തിൽ ഗണിതശാസ്ത്രത്തിന്റെ വികാസം ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്രപഠനത്തിന് ഉപോദ്ബലകമായ ഒരു ശാസ്ത്രമെന്ന നിലയ്ക്കായിരുന്നു. അക്കാലത്തെ സാമൂഹിക ക്രമത്തിനും ആചാരങ്ങൾക്കും അനുസൃതമായും ഗണിതശാസ്ത്രം പുരോഗമിച്ചു.

വൈദിക കാലത്ത് യജ്ഞശാലകളുടെ നിർമാണത്തിന് വിവിധ ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളുടെ കൃത്യമായ കണക്കുകൾ വേണ്ടിവന്നു. 'വൃത്തത്തെ ചതുരമാക്കൽ' എന്ന പ്രശ്നവും ഭാരതത്തിൽ ശ്രദ്ധയാകർഷിച്ചിരുന്നു. അക്കാലത്ത് π -യുടെ ഏകദേശനമായി $\sqrt{10}$ ഉപയോഗിച്ചുവന്നു.

ആര്യഭടൻ. *ആര്യഭടീയ*ത്തിൽ തന്റെ ജനനം 476-മാണ്ടിലാണെന്ന് അദ്ദേഹം പ്രസ്താവിച്ചു കാണുന്നു. ഗണിതപാദം 9-ാം ശ്ലോകത്തിൽ

"പരിധേ ഷഡ്ഭാഗ ജ്യാ
വിഷ്കംഭാർധേന സാ തുല്യാ"-

എന്നു പ്രസ്താവിച്ചിട്ടുണ്ട്. അതായത്, വൃത്തപരിധിയുടെ ആറിലൊരു ഭാഗത്തിന്റെ ജ്യാവ് വ്യാസാർധത്തിനു തുല്യം. ഈ നിരീക്ഷണം ത്രികോണമിതീയപട്ടികകളുടെ രൂപവത്കരണത്തിനു സഹായകമായി. 10-ാം ശ്ലോകമാണ് π -യുടെ ഏകദേശനം നൽകുന്നത്.

"ചതുരധികം ശതമഷ്ടഗുണം
ദ്വാഷഷ്ടി സ്തഥാ സഹസ്രാണാം
അയുത ദ്വയവിഷ്കംഭ-
ന്യാസന്നോ വൃത്ത പരിണാഹഃ"

അതായത് 104-നെ 8 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച് 62000 കൂട്ടിയാൽ 62832. ഇത് 20000 ഏകകം വ്യാസമുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ ആസന്നപരിധിയാണ്.

ഇതുപ്രകാരം $\pi = \frac{62832}{20000} = 3.1416$ എന്നു കാണാം.

384 വശങ്ങളുള്ള സമബഹുഭുജമുപയോഗിച്ച് ആര്യഭടൻ $\sqrt{9.8634}$ എന്ന വിലയിലേക്ക് എത്തുകയും തുടർന്ന് 3.1416 എന്ന ഏകദേശനത്തിലെത്തുകയുമായിരുന്നു.

ബ്രഹ്മഗുപ്തൻ. ഒരു യൂണിറ്റ് വ്യാസമുള്ള വൃത്തത്തിൽ അന്തർലേഖനം ചെയ്യാവുന്ന 12,24,48,96...വശങ്ങളുള്ള സമബഹുഭുജങ്ങളുടെ ചുറ്റളവ് യഥാക്രമം $\sqrt{9.65}, \sqrt{9.81}, \sqrt{9.86}, \sqrt{9.87}$ ... എന്നിങ്ങനെയാണെന്ന് അദ്ദേഹം കണ്ടെത്തി. ഈ സംഖ്യാ അനുക്രമം $\sqrt{10}$ ലേക്ക് എത്തുമെന്ന് ഊഹിച്ച് $\sqrt{10}$ എന്ന ഏകദേശനം ബ്രഹ്മഗുപ്തൻ π -യ്ക്കു നൽകി. ജൈനഗണിതജ്ഞർ π -യ്ക്കു നൽകിയിരിക്കുന്ന ഏകദേശനവും $\sqrt{10}$ ആണ്.

തുടർന്നു വന്ന ശ്രീധരൻ $\pi = 3$ എന്ന വില ഉപയോഗിച്ച് വൃത്തസ്ഥൂപികാപീഠത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കണ്ടപ്പോൾ മഹാവീരൻ ഒരു വൃത്തവലയത്തിന്റെ ഏകദേശ വിസ്തീർണം $\pi = 3$ നൽകുമെന്നും കൃത്യമായ വിസ്തീർണത്തിന് $\pi = \sqrt{10}$ എന്ന വില ഉപയോഗിക്കണമെന്നും കണ്ടെത്തി.

ഭാസ്കരാചാര്യർ. 1150-ൽ രചിച്ച *സിദ്ധാന്തശിരോമണി*യിലെ അങ്കഗണിത വിഭാഗമാണ് *ലീലാവതി*. ഇതിൽ π -യുടെ ഏകദേശനമായി $\frac{3927}{1250}$ നൽകിയിരിക്കുന്നു. ഇത് ആര്യഭടൻ നിർദേശിച്ച വില തന്നെയാണ്.

IV. **കേരളത്തിന്റെ സംഭാവന**. ഭാസ്കരാചാര്യർക്കുശേഷം ഇന്ത്യയിൽ ഗണിതശാസ്ത്രം വികാസം പ്രാപിച്ചത് കേരളത്തിലായിരുന്നു. ഈ വികാസത്തിന് പ്രത്യേകിച്ച് അനന്തശ്രേണികളുടെ പഠനത്തിന് വഴിവച്ചത് വ്യാസം തന്നാൽ വൃത്തപരിധി കൃത്യമായി കണക്കാക്കാൻ കഴിയില്ല എന്ന തിരിച്ചറിവായിരുന്നു. സംഗമഗ്രാമ മാധവനിൽ തുടങ്ങി ശങ്കരവർമനിലെത്തി നിൽക്കുന്ന പൈതൃകമാണ് കേരളീയ ഗണിതശാസ്ത്രത്തിന്റേത്.

സംഗമഗ്രാമ മാധവൻ. ഏകദേശം 1380–1420 കാലഘട്ടത്തിൽ ഇരിങ്ങാലക്കുടയ്ക്കടുത്ത് സംഗമഗ്രാമത്തിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന മാധവൻ കേരളീയ ഗണിതപഠനത്തിന് ശക്തമായ അടിത്തറ പാകി. അദ്ദേഹത്തിന്റെ പ്രശസ്തി പ്രധാനമായും ത്രികോണമിതീയ ഏകദങ്ങൾക്ക് അനന്തശ്രേണികൾ കണ്ടെത്തിയതിലാണ്.

$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$ എന്ന ശ്രേണിയിൽ $x = 1$ എന്നെടുത്താൽ $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$ എന്നു കിട്ടും.

ഗ്രിഗറി എന്ന ബ്രിട്ടീഷ് ഗണിതജ്ഞന്റെ പേരിൽ അറിയപ്പെട്ടിരുന്ന ഈ ശ്രേണി ഇപ്പോൾ മാധവ-ഗ്രിഗറി ശ്രേണി എന്ന് അറിയപ്പെട്ടു തുടങ്ങിയിട്ടുണ്ട്.

ബഹുഭുജങ്ങളെ വിട്ട് നേരിട്ട് π കണ്ടെത്താനുള്ള ഒരു മാർഗമായി ഈ കണ്ടുപിടിത്തം. ലഘൂകരിച്ചാൽ, $\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \cdots$ എന്ന അനന്തശ്രേണിയിൽ എത്തിച്ചേരും.

ഇവിടെ ക്രമാനുഗതമായി പദങ്ങളുടെ തുക കണ്ടാൽ 4, 2.667, 3.467, 2.896, 3.340 എന്നിങ്ങനെ പോകും. രണ്ടു ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങൾക്കു കൃത്യമായ വില ലഭിക്കണമെങ്കിൽപ്പോലും 300 പദങ്ങൾ വേണ്ടിവരും. അതായത് വളരെ സാവധാനമേ ഈ ശ്രേണി π -യോട് അഭിസരിക്കുകയുള്ളൂ.

ലീലാവതീ വ്യാഖ്യാനമായ *ക്രിയാക്രമകരി*യിൽ നാരായണൻ $\pi = \frac{104348}{33215} = 3.14159265$ എന്നു കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

*കരണപദ്ധതി*യിൽ പുതുമന സോമയാജി, 10^{10} വ്യാസമുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ പരിധി 31415926536 എന്നു കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. ഇത് 10 ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾക്കു കൃത്യമായി π -യുടെ വില നൽകുന്നു.

10^{17} വ്യാസമുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ പരിധി 314159265358979324 ആണെന്ന് *സദ്രത്നമാല*യിൽ 1819–ൽ ശങ്കരവർമൻ നിർണയിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഇത് 17 ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങൾക്ക് കൃത്യമായി π -യുടെ വില ലഭ്യമാക്കുന്നു.

വൃത്തവും ചതുരവും. r-വ്യാസാർധമുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ വിസ്തീർണം πr^2 ആണല്ലോ. $r = 1$ ആണെങ്കിൽ ഈ വിസ്തീർണം π ആകും. ഈ വിസ്തീർണത്തിനു തുല്യ വിസ്തീർണമുള്ള സമചതുരം നിർമിക്കണമെങ്കിൽ $\sqrt{\pi}$ എന്ന നീളം നിർമിക്കേണ്ടിവരും. വൃത്തത്തിനു തുല്യ വിസ്തീർണമുള്ള സമചതുരം നിർമിക്കലും തിരിച്ച് സമചതുരത്തിനു തുല്യ വിസ്തീർണമുള്ള വൃത്തം നിർമിക്കലും വർഷങ്ങൾ പഴക്കമുള്ള പ്രശ്നം ആയിരുന്നു.

ഈ പ്രശ്നം പരിഹരിക്കുന്ന നിരവധി ഏകദേശ മാർഗങ്ങൾ പ്രാചീന കാലം മുതൽ നിലവിലുണ്ടായിരുന്നു. ഭാരതീയ ഗ്രന്ഥമായ *ശുൽബസൂത്ര*ത്തിൽ വൃത്തത്തെ സമചതുരം ആക്കാനുള്ള മാർഗമായി ഇപ്രകാരം പറയുന്നു. "വ്യാസത്തെ 15 ഭാഗങ്ങളാക്കി അതിൽ 13 ഭാഗം സമചതുരത്തിന്റെ ഭുജമായി സ്വീകരിക്കുക". ഇതു പ്രകാരം $\pi = \frac{676}{225} = 3.004...$ എന്നു കിട്ടുന്നു.

ഇതു പോലെ ഒരു സമചതുരത്തെ വൃത്തമാക്കാനുള്ള മാർഗവും *ശുൽബസൂത്ര*ത്തിൽ പറയുന്നുണ്ട്. ഇതു പ്രകാരം ഒരു യൂണിറ്റ് വശമായുള്ള ഒരു സമചതുരത്തെ വൃത്തമാക്കുമ്പോൾ അതിന്റെ ആരം $\frac{1}{6}(2 + \sqrt{2})$ എന്നാണ് കിട്ടുന്നത്. ഇതു പ്രകാരം

$\pi = \frac{36}{(2+\sqrt{2})^2} = 3.088$ എന്നും കിട്ടുന്നു.

V. **ആധുനിക കാലഘട്ടം**. 1949 സെപ്റ്റംബറിൽ അമേരിക്കൻ ഗണിതജ്ഞനായ ജോൺ റെഞ്ചിന്റെ (John Wrench) നേതൃത്വത്തിൽ കംപ്യൂട്ടർ ഉപയോഗിച്ച് 70 മണിക്കൂർ കൊണ്ട് π -യുടെ വില 2037 ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾക്കു കൃത്യമായി കണക്കാക്കി.

ഇരുപതാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ശ്രീനിവാസരാമാനുജൻ π ഉൾപ്പെട്ട നിരവധി സൂത്രവാക്യങ്ങൾ കണ്ടെത്തി.

$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!\,(1103 + 26390n)}{(n!)^4\,(396)^{4n}}$ അവയിലൊന്നാണ്.

$n = 0$ ആയിരിക്കെ, 6 ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾക്കു ശരിയായി π -യുടെ വില ഇതു നൽകുന്നു. n–ന്റെ ഓരോ അധികവിലയും ഏകദേശം എട്ടു സ്ഥാനങ്ങളുടെ കൃത്യത π -യ്ക്കു കൈവരുന്നു.

ഇതിൽ നിന്നും പ്രചോദനമുൾക്കൊണ്ട് 1980–ൽ ചുഡ്നോവ്സ്കി സഹോദരന്മാർ (ഉക്രെയ്ൻ) ഓരോ പദവും π -യ്ക്ക് 15 അക്കങ്ങളുടെ കൃത്യത നൽകുന്ന

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times \frac{(6n)!}{(3n)!\,(n!)^3} \frac{163096908 + 6541681608\,n}{(262537412640768000)^{n+\frac{1}{2}}}$$

എന്ന ഭീമൻ സൂത്രം കണ്ടെത്തി. ചുഡ്നോവ്സ്കിമാർ 1990–ൽ 2 ബില്യൻ (200 കോടി) ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾക്കു കൃത്യമായി π -യുടെ വില കാണാൻ സൂപ്പർ കംപ്യൂട്ടർ നിർമിച്ചു. ടോക്കിയോ സർവകലാശാലയിലെ കംപ്യൂട്ടർ ശാസ്ത്രജ്ഞനായിരുന്ന യസുമസ കനഡ (Yasumasa kanada) 1981–ൽ ഒരു കംപ്യൂട്ടറിന്റെ സഹായത്താൽ 137 മണിക്കൂർ കൊണ്ട് π -യുടെ വില 2 മില്യൻ (20 ലക്ഷം) സ്ഥാനങ്ങൾക്കു കൃത്യമായി കണ്ടു. ഇതോടെ ജപ്പാനും അമേരിക്കൻ ഐക്യനാടുകളും തമ്മിലുള്ള ഒരു മത്സരമായി ഇതു മാറി. മൂന്നു വർഷങ്ങൾക്കുശേഷം കനഡ തന്റെ റെക്കോഡ് 16 മില്യൻ (160 ലക്ഷം) സ്ഥാനങ്ങളാക്കി ഉയർത്തി. കാലിഫോർണിയയിലെ വില്യം ഗോസ്പർ (William Gospar) 17.5 ദശലക്ഷത്തിലേക്ക് കടന്നപ്പോൾ നാസ(NASA)യിലെ ഡേവിഡ് എച്ച് ബെയ്‌ലി (David H Bailey) 29 ദശലക്ഷത്തിലെത്തി. 1986–ൽ കനഡ ഇവരെ തോൽപ്പിച്ച് 33–ലെത്തി. s–820 എന്ന കംപ്യൂട്ടറിൽ ആറു മണിക്കൂറിൽ താഴെ സമയമെടുത്ത് കനഡ അടുത്ത രണ്ടു വർഷത്തിനുള്ളിൽ 201 മില്യൻ എന്ന പുതിയ റെക്കോഡിലെത്തി.

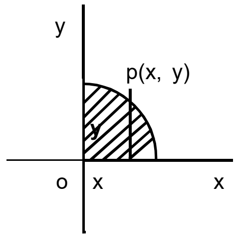
ചുഡ്നോവ്സ്കിമാർ 1.13 ബില്യൻ (113 കോടി) സ്ഥാനങ്ങളുടെ കൃത്യതയിലെത്തിക്കുമ്പോൾ കനഡ 2002–ൽ 1.2 ട്രില്യൻ (1.2×10^{12})എന്ന പുതിയ ഉയരങ്ങളിലെത്തി. 2008–ൽ ത്സുകുബ (Tsukuba) സർവകലാശാലയിലെ അദ്ദേഹത്തിന്റെ സഹപ്രവർത്തകർ 2.6 ട്രില്യൻ എന്ന സംഖ്യയിലെത്തി. 2009 ഡിസംബറിൽ ഫ്രാൻസിലെ ഫബ്രിസ് ബെലാർ (Fabrice Bellard) തന്റെ പേഴ്സണൽ കംപ്യൂട്ടറിൽ 131 ദിവസമെടുത്ത് 2.7 ട്രില്യൻ സ്ഥാനങ്ങളുടെ നേട്ടമുണ്ടാക്കി. ഏറ്റവുമൊടുവിൽ 208 ദിവസം കൊണ്ട് 13 ട്രില്യൻ സ്ഥാനങ്ങൾക്കാണ് π -യുടെ വില കണ്ടുപിടിച്ചിരിക്കുന്നത്.

π -യുടെ വില കോടിക്കണക്കിനു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾക്കു ശരിയായി കണ്ടുപിടിക്കുമ്പോഴും ഒരു ചോദ്യം അവശേഷിക്കുന്നു. സാധാരണ ആവശ്യങ്ങൾക്ക് എത്ര സ്ഥാനങ്ങളുടെ കൃത്യതവരെ പോകണം?

സാധാരണ ആവശ്യങ്ങൾക്ക് π -യുടെ രണ്ടു ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങളുടെ കൃത്യത മതിയാവും. ശാസ്ത്രീയ ആവശ്യങ്ങൾക്ക് അത് നാല് സ്ഥാനങ്ങൾ വരെയാവാം. ഒരിഞ്ചിനു ശരിയായി ഭൂമിയുടെ പരിധി നിർണയിക്കാൻ π -യുടെ പത്തു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങളുടെ കൃത്യത മതിയെന്ന് അമേരിക്കൻ ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്രജ്ഞനായ സിമോൺ ന്യൂക്കോംബ് (Simon Newcomb) അഭിപ്രായപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. അതിനപ്പുറത്തേക്കുള്ള കണ്ടെത്തലുകൾ ഗണിതശാസ്ത്രപരമായ കൗതുകങ്ങളിൽ നിന്നുണ്ടായതാണ്.

യൊഹാൻ ലാംബേർ (Johann Lambert; 1728-77) π ഒരു ഭിന്നകമല്ലെന്നു തെളിയിച്ചു. യോസഫ് ലയവിൽ (Joseph Liouville 1809-82) അതീത സംഖ്യകൾ കണ്ടെത്തി. 1882–ൽ ലിൻഡ്മാൻ (Lindemann; 1852-1939) π – അതീതസംഖ്യയാണെന്നു തെളിയിച്ചു.

നിർദേശാങ്കജ്യാമിതി ഉപയോഗിച്ചാൽ ഒരു യൂണിറ്റ് വ്യാസാർധവും കേന്ദ്രം മൂലബിന്ദുവുമായ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം $X^2 + y^2 = 1$ ആണ്.



ഈ വൃത്തത്തിന്റെ ചതുർഥാംശത്തിന്റെ വിസ്തീർണം $\frac{\pi}{4}$ ചതുരശ്ര യൂണിറ്റ് ആണ്. ഇതിനെ ഒരു സമാകലത്തിൽ നിന്നും കണ്ടെത്താം.

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

ഇക്കാരണത്താൽ കലനം, സമാകലനം എന്നീ ഗണിതശാസ്ത്രശാഖകളിൽ π -യുടെ സാന്നിധ്യം ശ്രദ്ധേയമാണ്. വൃത്തവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളുടെ ചുറ്റളവ്, പരിധി, വിസ്തീർണം, ത്രിമാനരൂപങ്ങളുടെ വ്യാപ്തം തുടങ്ങിയവ കാണാനുള്ള സൂത്രങ്ങളിൽ π അടങ്ങിയിരിക്കുന്നു.

സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിലും π സർവസാധാരണമായി കണ്ടുവരുന്നു. ഒരു ജനസംഖ്യാവ്യവസ്ഥയിൽ മരണത്തിന്റെ വിതരണം (distribution of death) π -യുടെ ഒരു ഏകദമാണ്. ഒരു നാണയം 2n പ്രാവശ്യം എറിഞ്ഞാൽ, n വളരെ വലുതാണെങ്കിൽ, 50 ശ.മാ. പ്രാവശ്യം വാലും 50 ശ.മാ. പ്രാവശ്യം തലയും ലഭിക്കാനുള്ള സംഭാവ്യത $\frac{1}{\sqrt{n\pi}}$ ആണ്.

നോർമൽ സംഭാവ്യത വിതരണം (normal probability distribution) സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ എന്നാണ്.

ഒരു ലളിത പെൻഡുലത്തിന്റെ പീരീഡ് $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ആണെന്ന് ഭൗതികശാസ്ത്രം. കൂടാതെ ക്വാണ്ടം മെക്കാനിക്സ്, ഐൻസ്റ്റൈന്റെ ആപേക്ഷികതയുടെ പൊതു സിദ്ധാന്തം തുടങ്ങിയവയിലെല്ലാം π -യുടെ സാന്നിധ്യമുണ്ട്. സിഗ്നൽ പ്രോസസിങ് തുടങ്ങി ശാസ്ത്രത്തിന്റെ ഏതു മേഖലയിലും π ഒഴിച്ചു കൂടാനാവാത്ത സംഖ്യയാണെന്ന് പറയാം.

VI. **പാറ്റേണുകൾ.** π -യുടെ ദശാംശ ഭിന്നരൂപത്തിലെ അക്കങ്ങൾ പരിശോധിച്ചാൽ പല കൗതുകങ്ങളും കണ്ടെത്താം. മൊത്തമായി ഒരു പാറ്റേൺ അനുസരിച്ചല്ല π -യുടെ വിലയിലെ അക്കങ്ങളുടെ ക്രമം. ആദ്യമായി 0 എന്ന അക്കം 32–ാം സ്ഥാനത്തുവരുന്നു. ആറു പ്രാവശ്യം ഒരക്കം ആവർത്തിക്കുന്നത് 999999 ആണ്, 762–ാം സ്ഥാനത്ത്. 0123456789 എന്ന അനുക്രമം 1997–ൽ കനഡ കണ്ടെത്തിയിരുന്നു.

VII. **π കൗതുകങ്ങൾ.** π -യുടെ വില അനേകം ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾക്കു കൃത്യമായി ഇപ്പോൾ കണ്ടെത്തിയിട്ടുണ്ട്. എന്നാൽ ആയിരക്കണക്കിനു സ്ഥാനങ്ങൾ ക്രമം തെറ്റാതെ ഓർമയിൽ നിന്നും പറയുന്നവരുണ്ട്. അറുപതുകാരനായ അക്കിറ ഹരഗുച്ചി (Akira Haraguchi) ഒരു ലക്ഷം ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ ക്രമം തെറ്റാതെ ഓർമയിൽ നിന്നു പറഞ്ഞു.

പൈ ദിനാഘോഷം ഓരോ വർഷവും മാർച്ച് 14–ന് 3.14 എന്ന തീയതി സൂചന ആസ്പദമാക്കി കൊണ്ടാടുന്ന രീതി ഇന്നു നിലവിലുണ്ട്. 1988–ൽ ഇത്തരം ആഘോഷം ആരംഭിച്ചതായി പറയപ്പെടുന്നു. 2014–ലെ മാർച്ചുമാസം മുഴുവൻ (3/14) പൈ മാസം ആയി ചില ഗണിത കേന്ദ്രങ്ങൾ ആഘോഷിച്ചതായി കാണുന്നുണ്ട്.

(ഡോ. റ്റി.ജി. ശരച്ചന്ദ്രൻ)